**Задача**

Проходит спортивная игра, в ней играют 2 участника. Игра проходит по следующим правилам. Каждый участник может выиграть 1 очко за свое результативное действие (например, выигрыш розыгрыша в настольном теннисе). Задано минимальное число очков, которое необходимо набрать участнику, чтобы выиграть всю игру (M). Как только один из участников набрал M очков, участник признается победителем и игра заканчивается. Вероятность того, что первый игрок выиграет одно очко равна р и не изменяется по ходу игры.

Требуется:

1. при M = 3, вычислить вероятность всех возможных окончательных точных счетов игры (вероятность, что игра окончится счетом 3-0, 3-1, 3-2, 2-3, 1-3, 0-3);
2. при M = 3, вычислить вероятность того, что по окончании игры сумма набранных очков будет меньше, чем 3.5;
3. при M = 3, вычислить вероятность того, что по окончании игры первый участник победит в ней;
4. в общем случае, вычислить вероятность того, что по окончании игры первый участник победит в ней

**Решение**

1. *При M = 3, вычислить вероятность всех возможных окончательных точных счетов игры (вероятность, что игра окончится счетом 3-0, 3-1, 3-2, 2-3, 1-3, 0-3);*

Вероятность счета (3-0).

Для решения можно использовать теорему о произведении вероятностей, которая утверждает, что вероятность того, что последовательно произойдут несколько независимых событий равна произведению этих вероятностей. При счете 3-0 первый участник должен выиграть три раза подряд. Таким образом при вероятности каждого выигрыша *p*, искомая вероятность составит *p*3.

Вероятность счета (3-1) можно посчитать следующим образом. Как было получено ранее, вероятность того, что первый игрок наберет 3 очка - . С другой стороны вероятность выигрыша одно очка вторым игроком составляет (1-*p*). Таким образом, по теореме о произведение вероятностей, вероятность счета (3-1), будет . Множитель 3 возникает вследствие того, что последовательностей набора очков для счета (3-1) может быть 3 (Ниже будет дано объяснение расчета этого множителя).

Таким же образом можно рассчитать и следующие вероятности:

Вероятность счета (3-2) будет

Вероятность счета (2-3) будет

Вероятность счета (1-3) будет

Вероятность счета (0-3) будет

Расчет коэффициентов

Рассмотрим подробнее счет (3-2). Согласно теореме о произведении вероятностей вероятность такого счета будет пропорционально произведению . Однако, такой счет может быть достигнуть несколькими вариантами. Если обозначить за А победу первого игрока, а В – второго игрока, то счет может быть достигнуть достигнут следующими последовательностями исходов игры А и В: АВАВА, АВВАА, ВВААА и т.д. То есть необходимо вычислить вероятность события, когда у нас будет реализована одна из этих комбинаций. Для этого нужно просуммировать вероятности каждой из таких комбинаций (Теорема о сумме вероятностей). Так как вероятность каждой из таких комбинаций в отдельности равна , то вероятность счета (3-2) будет , где К – количество возможных комбинаций. Отметим, что комбинация А и В всегда должна заканчивать на А (так как первый игрок выигрывает), поэтом можно рассмотреть количество комбинаций двух А и двух В. Для этого нужно воспользоваться формулой для количества перестановок с повторяющимися элементами. В нашем случае это будет . Таким образом, коэффициент *К* = 6.

Для остальных счетов коэффициент К рассчитывается аналогичным образом. Для счетов 3-1 и 1-3

*при M = 3, вычислить вероятность того, что по окончании игры сумма набранных очков будет меньше, чем 3.5;*

Сумма набранных очков будет меньше, чем 3.5 будет только для двух исходов – 3-0 и 0-3. Для всех остальных счетов, сумма очков будет равна 4 и более. Для расчёта вероятности воспользуемся теоремой о сумме вероятностей и результатам из предыдущего задания - .

*при M = 3, вычислить вероятность того, что по окончании игры первый участник победит в ней;*

Также воспользуемся результатами из первого задания и просуммируем вероятности исходов 3-0, 3-1, 3-2. Результат будет

*в общем случае, вычислить вероятность того, что по окончании игры первый участник победит в ней*

В общем случае первый игрок выигрывает при следующих счетах М-0, М-1, М-2, …, М-N, где N изменяется от от 0 до M-1. Вероятность каждого из таких исходов равно соотношению , где коэффициент К будет равен (рассматриваем М-1, так как последнее очко всегда должно быть за первый игроком).

Таким образом, вероятность победы первого игрока будет суммой